**ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

**БАРОТРОПНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРА СКОРОСТИ**

**Введение.** В работе рассматривается упрощенная гидродинамическая модель [1], которая может быть использована для определения скорости течения в водоемах. Общепринятый метод вычисления вектора скорости течения использует представления вектора горизонтальной скорости в виде суммы баротропной и бароклинной составляющих. В работе [2] предлагается разностная схема для вычисления баротропной компоненты вектора скорости. При численной реализации данной разностной схемы на каждом шаге по времени требуется вычислять численные производные некоторых членов решаемого уравнения. Данная операция численного дифференцирования может вносить ошибку, которая накапливается на каждом шаге по времени. В настоящей работе предлагается новая разностная схема для вычисления баротропной составляющей, которая не требует на каждом шаге по времени производить численное дифференцирование.

**Упрощенная гидродинамическая модель.** Рассмотрим упрощенную гидродинамическую модель [1]











Система уравнений - рассматривается в трехмерной области , где  – двумерная область, расположенная в плоскости  (зеркало водоема); функция  описывает рельеф дна. В модели - приняты следующие обозначения:  – компоненты вектора скорости;  – давление на невозмущенной поверхности ;  – сила Кориолиса;  – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости;  - среднее значение плотности;  – компоненты касательного напряжения трения ветра;  – компоненты, описывающие трение о дно;  – вектор внешней нормали к границе области ;  – известные функции.

При вычислении скорости течения используется представление горизонтального вектора скорости в виде суммы бароклинной  и баротропной  компонент [3]:



где



В (7) *U* и *V* – интегральные скорости, которые определяются формулами:



В (3) принимается следующий вариант параметризации придонного трения [3]:



где  – параметр, характеризующий трение о дно.

**Аппроксимация по времени.** Введем комплексную скорость по формуле

,

что позволит нам заменить первые два уравнения системы уравнений движения одним уравнением следующего вида:



где

.

Проинтегрируем уравнение по *z* от 0 до *H*, результат разделим на *H*, после этого, в соответствии с обозначением , краевыми условиями , и представлением , получим уравнение для баротропной составляющей комплексной скорости :



Построение разностной схемы для баротропной компоненты горизонтальной скорости начнем с построения аппроксимации по времени в уравнении . С этой целью умножим уравнение на некоторую тестовую функцию  и проинтегрируем в пределах временного слоя , в том числе и по частям, в результате получим:



Тестовую функцию  выберем как решение задачи



она легко находится, подставляя ее в , приходим к соотношению:



здесь:

;

;

.

Учет первого слагаемого в правой части будет неявным, для второго – примем однопараметрический вариант аппроксимации по времени



где , , . В итоге получим:



Возвращаясь к баротропным компонентам , перепишем уравнение в виде системы:



где





Используя стандартную процедуру перекрестного дифференцирования, исключаем давление  на невозмущенной поверхности из уравнений , затем, добавляя уравнение неразрывности для интегральных скоростей, приходим к задаче:



**Аппроксимация по пространственной переменной.** Рассмотрим задачу



Задача является общим случаем задачи . Для задачи построим разностную схему. Для построения разностной схемы используем метод, изложенный в работах [4, 5]. В области  рассмотрим прямоугольную, вообще говоря, неравномерную сетку, пусть  - ее произвольная ячейка. Умножим первое уравнение системы на некоторую, пока произвольную функцию , второе уравнение - на произвольную функцию , результаты сложим и проинтегрируем по ячейке , в том числе и по частям. В итоге приходим к интегральному тождеству:



Тестовые функции  будем выбирать так, чтобы они в  удовлетворяли системе уравнений



с постоянными коэффициентами , аппроксимирующими в  функции - соответственно. Рассмотрим два варианта выбора функций . Пусть  - некоторая, достаточно гладкая и пока произвольная функция. Положим:



тогда первое уравнение в будет выполнено для любой функции . Удовлетворяя второму уравнению в , получим условие для выбора :



Второй вариант выбора тестовых функций основан на представлении:

.

В этом случае второе уравнение в будет выполнено автоматически. Первому уравнению в функции будут удовлетворять при выполнении условия . Легко построить четыре линейно независимых решения уравнения , обращающихся в единицу в одной из вершин ячейки  и в ноль – во всех остальных. Для этого каждому горизонтальному ребру сетки  поставим в соответствие пару функций , являющихся решением задачи:



Пусть вертикальным ребрам  отвечают решения  задачи:



Здесь приняты обозначения:



и аналогичные для *a* и *b*. Теперь на прямоугольнике  определим четыре функции:



Очевидно, что  является решением (в ) уравнения



и удовлетворяет условиям:



 для .

Введем несколько дополнительных обозначений:





Восемь пар тестовых функций  после этого находим из соотношений и . Подставляя эти тестовые функции в тождество , мы автоматически избавляемся от главного интегрального слагаемого в его левой части, затем, аппроксимируя оставшиеся одномерные интегралы, в итоге получаем систему разностных уравнений для определения приближенных значений функций *u* и *v* в узлах сетки. Перед аппроксимацией интеграла, стоящего в правой части , производится его интегрирование по частям, чтобы производные с функций *f* и *g* перебросить на функции . Таким образом, нам не нужно будет производить численное дифференцирование функций *f* и *g*. Опуская технические детали, выпишем итоговую систему разностных соотношений.



где . В случае, когда *i* таково, что мы выходим на левую вертикальную границу, уравнения будут использоваться как разностные уравнения в узлах левой вертикальной границы для определения функции , которая там не задана. Отметим, что правые части в в этом случае определены в силу граничных условий на .



В случае выхода на правую вертикальную границу уравнения используются как граничные уравнения для определения , при этом значения  на вертикальных границах известны из краевых условий.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Статья, опубликованная в журнале НСРАН.
2. Статья Скляр С.Н. и Рылова, в которой описывается разностная схема для баротропной компоненты.
3. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. – Москва: Наука, 1988. – 302 с.
4. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2002. – 238 с.
5. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988. – № 4. – С. 10-23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же, – 1989. – № I. – С. 3-10. III. Самосопряженное уравнение // Там же, – 1989. – № 4. – С. 3-11.